**Matrices inverses**

**Objectif(s)**

Définir la notion de matrice inverse.  
Donner un moyen simple d’obtenir la matrice inverse d’une matrice carrée d’ordre 2.

Pour tout nombre non nul *X*, il existe un unique nombre *Y* tel que *X*http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/7/405754.gif*Y* = *Y*http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/7/405756.gif*X* = 1.  
  
On dit alors que ***X*** **est inversible de nombre inverse** ***Y*** ; on note *Y* = *X* -1 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/7/405758.gif.  
  
Qu’en est-t-il pour les matrices ?

[Cours particuliers de Mathématiques niveau Lycée](https://www.livementor.com/cours-particuliers/Lycee/Mathematiques?widget=nov15&utm_source=http://www.cours.fr/)

**1. Définitions et propriétés**

a. Définition 1 : matrice inverse

Soit *A* une matrice carrée d’ordre *n*.  
  
On dit que *A* est une **matrice** **inversible** s’il existe une matrice *B* carrée d’ordre *n* vérifiant la double égalité : ***A*http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405817.gif*B* =** ***B***http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405821.gif***A*** **= *In*** avec *In*, la matrice identité d’ordre *n*.  
  
*B* est une **matrice inverse** si ***B*** **= *A*-1**.

***Remarque***  
La notion de matrices inverses ne concerne que les matrices carrées.

b. Propriété 1 : unicité

Avec les notations de la définition, **la matrice *B* inverse est unique**.

***Preuve***  
Soit *C* une matrice carrée d’ordre *n* vérifiant aussi la double égalité *AC* = *CA* = *In*.  
  
En utilisant les diverses propriétés du produit matriciel on a :  
  
*C* = *C* × *In* = *C* × (*A* × *B*) = (*C* × *A*) × *B* = I*n* × *B* = *B*.  
  
Ainsi, **si une matrice carrée est inversible, alors sa matrice inverse est unique**.  
  
Exemple : Soient deux matrices *A* et *B* telles que : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405823.gif.  
  
On calcule *AB* puis *BA* : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405825.gif.  
  
Et on remarque que *B* = *A*-1.

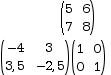
c. Propriété 2 : inverse d'une matrice inverse

Soit *A* une matrice carrée d’ordre *n* inversible.  
La matrice inverse ***A*-1 est inversible et (*A*-1)-1 = *A***.

***Preuve***  
On doit démontrer que *A*-1 × *A* = *A* × *A*-1 = *In* ; ces égalités sont vraies puisqu’elles définissent l’inversion de *A*.

**2. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2**

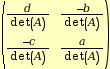
a. Exemple

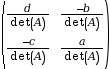
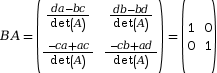
**Soit *A* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405831.gif. La matrice *A* est-elle inversible ? Si oui, quelle est sa matrice inverse ?**  
  
On cherche une matrice *B* carrée d’ordre 2 vérifiant *AB* = *BA* = *I2*.  
  
On pose pour cela : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405833.gif.  
  
*AB* = *I2* http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405835.gifhttp://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405837.gif et http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405839.gif  
  
En se remémorant son cours de seconde, on sait que ces deux systèmes ont un unique couple solution puisque http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405845.gif.  
  
Le nombre http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405847.gif est appelé le **déterminant** de ces systèmes ; on dira aussi qu’il s’agit du déterminant de la matrice *A* et on le notera **det(*A*)**.  
  
Résolvons ce système : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405849.gif et http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405851.gifhttp://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405853.gifhttp://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405855.gif et http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405857.gif.  
  
Ainsi *B* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405859.gif et on vérifie ensuite que : .  
  
Donc : *A-1* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405863.gif.

b. Définition 2 : déterrminant d'ordre 2

Soit *A* une matrice carrée d’ordre 2 définie par *A* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405865.gif.  
On appelle déterminant de *A* le nombre http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405867.gif. On le note **det(*A*)**.

c. Propriété 3 : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Avec les notations de la définition 2, la matrice *A* est inversible lorsque det(*A*) ≠ 0.  
  
De plus, on dispose de l’égalité fournissant *A*-1 à savoir : det(*A*) × *A-*1 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405869.gif.  
Ainsi, A-1 = .

***Preuve***  
On cherche une matrice *B* carrée d’ordre 2 vérifiant *AB* = *BA* = *I*2.  
  
On pose : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405873.gif.  
  
*AB* = *I*2http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405875.gifhttp://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405877.gif et http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405879.gif  
  
En se remémorant son cours de seconde, on sait que ces deux systèmes ont un unique couple solution lorsque http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405881.gif , soit encore http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405883.gif.  
  
Autrement dit *AB* = *I*2 lorsque det(*A*) ≠ 0.  
  
Dans ce cas et après calcul on a : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405885.gif et http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405887.gifhttp://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405889.gif et .  
Ainsi, *B* = .  
  
Reste plus qu'à calculer *BA* : .  
  
Concrètement, lorsque l’on souhaite inverser une matrice carrée http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/8/405899.gif, on procède de la façon suivante :

• On calcule det(*A*) = *ad* – *bc*. S’il est nul, A n’est pas inversible, sinon elle l’est.  
  
• On crée une matrice carrée d’ordre 2 en procédant ainsi :  
         - on permute les nombres de la diagonale principale de *A* : d à la place de *a*.  
         - pour l'autre diagonale, on ne permute pas les nombres mais on prend leurs opposés.  
  
         On obtient finalement une nouvelle matrice égale à det(*A*)http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405901.gif*A*-1 : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405903.gif.  
  
         On trouve *A*-1 en divisant les coefficients de cette nouvelle matrice par det(*A*).

Prenons un exemple pour illustrer cette méthode.  
  
Soit *A* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405905.gif :  
  
→ det(*A*) = –10 – (–12) = 2 donc *A* est une matrice inversible.  
  
→ on obtient la matrice http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405907.gif.  
  
→ d'où 2http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405909.gif*A*-1 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405911.gifhttp://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405913.gif*A*-1 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/405752/img/4/0/5/9/405915.gif.  
  
***Remarque***  
Pour l’inversion des matrices carrées d’ordre supérieur à 2, on utilisera des logiciels gratuits ou bien la calculatrice programmable.